3. $x^4 = -3 = 3\,\mathrm{cis}\,180°$: módulo $\sqrt[4]{3}$, ángulos $\frac{180°+360°k}{4} = 45°, 135°, 225°, 315°$. En forma binómica, $\sqrt[4]{3}\,\mathrm{cis}\,45° = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1+i)$, y las otras tres son

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1-i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1-i).$$

4. **Ocho raíces:** $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm\sqrt[4]{2}\,i$ y $\sqrt[4]{3}\,\mathrm{cis}\,\theta$ con $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$.
5. Cota superior. Con $c = 1$ el residuo es negativo:

	1	0	0	0	1	0	0	0	−6
1		1	1	1	1	2	2	2	2
	1	1	1	1	2	2	2	2	−4

Con $c = 2$, todos los resultados son positivos:

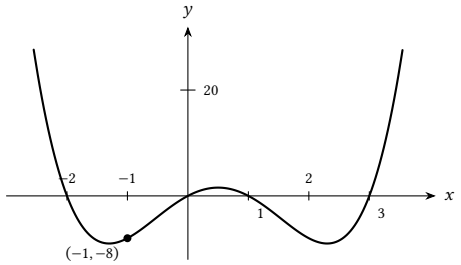
	1	0	0	0	1	0	0	0	−6
2		2	4	8	16	34	68	136	272
	1	2	4	8	17	34	68	136	266

6. **Cota superior:** $c = 2$**.** En efecto, la única raíz real positiva es $\sqrt[4]{2} < 2$.

Ejercicio 4.5.5 · Polinomio de menor grado a partir de su gráfica

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje x en -2, 0, 1 y 3 (en los cuatro puntos lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto $(-1, -8)$.



Resolución.

1. Cuatro cruces del eje, cada uno de multiplicidad 1 (la curva atraviesa el eje): el menor grado es 4.
2. $p(x) = a\,(x+2)\,x\,(x-1)(x-3)$.
3. Punto $(-1,-8)$: $a\,(1)(-1)(-2)(-4) = -8a = -8$, así que $a = 1$. Es positivo, como indican los extremos que suben.
4. $p(x) = x(x+2)(x-1)(x-3) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$.

Lado derecho de la tesis:

$$\begin{aligned}(k^2+2k+1)(2k^2+4k+1) &= 2k^4+4k^3+k^2+4k^3+8k^2\\ &\quad +2k+2k^2+4k+1\\ &= 2k^4+8k^3+11k^2+6k+1.\end{aligned}$$

Son iguales.

Conclusión: por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.5.3 · Suma con potencias de 3 en el denominador

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 1.

Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{5}{9} + \frac{7}{27} + \cdots + \frac{2n+1}{3^n} = -\left(\frac{1}{3}\right)^n (n+2) + 2.$$

Resolución.

Proposición. Término general $\frac{2n+1}{3^n}$ (con $n = 1$ da $\frac{3}{3} = 1$). El sumando nuevo es $\frac{2k+3}{3^{k+1}}$. El lado derecho se escribe mejor como $2 - \frac{n+2}{3^n}$.

Base ($n = 1$). Izquierdo: $\frac{3}{3} = 1$. Derecho: $2 - \frac{3}{3} = 1$. Se cumple.

Hipótesis ($n = k$). $1 + \frac{5}{9} + \cdots + \frac{2k+1}{3^k} = 2 - \frac{k+2}{3^k}$.

Tesis ($n = k+1$). $1 + \frac{5}{9} + \cdots + \frac{2k+3}{3^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{3^{k+1}}$.

Paso inductivo. Denominador común 3^{k+1}:

$$\begin{aligned}2 - \frac{k+2}{3^k} + \frac{2k+3}{3^{k+1}} &= 2 - \frac{3(k+2)-(2k+3)}{3^{k+1}}\\ &= 2 - \frac{k+3}{3^{k+1}} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}(k+3) + 2.\end{aligned}$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.5.4 · Producto que empieza en n = 2

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo A, problema 2.

Demuestre por inducción matemática que, para todo natural $n \geq 2$,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Resolución.

Proposición. Es un producto: el factor general es $1 - \frac{1}{n}$ y el factor nuevo es $1 - \frac{1}{k+1}$. La base es $n = 2$.

4. Comprobación con raíces racionales: los candidatos son $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$, y los tres que salen están en la lista.
5. **Raíces:** $0,\ i,\ -i,\ \frac{1}{2},\ 1,\ -1$. Son seis, como el grado.

$$f(x) = 2x\,(x-i)(x+i)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x-1)(x+1).$$

4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · Coeficientes a partir de dos raíces

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 3.

Dado el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - Ax + 2B$, determine:

- a) los valores de A y B si 1 y -1 son raíces de P;
- b) la expresión de $P(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. $P(1) = 1 + 1 - 7 - A + 2B = 0 \ \Rightarrow\ -A + 2B = 5$.
2. $P(-1) = 1 - 1 - 7 + A + 2B = 0 \ \Rightarrow\ A + 2B = 7$.
3. Sumando: $4B = 12$, $B = 3$; entonces $A = 7 - 6 = 1$. a) $A = 1,\ B = 3$.
4. $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Se divide entre $x - 1$ y el cociente entre $x + 1$:

	1	1	−7	−1	6
1		1	2	−5	−6
−1	1	2	−5	−6	0
		−1	−1	6	
	1	1	−6	0	

5. $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$.
6. b) $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$. Comprobación: producto de raíces $1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-3) = 6 = (-1)^4 a_0$.

Ejercicio 4.5.2 · Coeficientes a partir de tres puntos de la gráfica

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 3.

La gráfica del polinomio $p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$ contiene a los puntos $(-1,-6)$, $(0,2)$ y $(1,0)$. Determine:

- a) los valores de $A, B, C \in \mathbb{R}$;
- b) todas las raíces de $p(x)$.

Resolución.

1. $p(0) = A = 2$.
2. $p(1) = A + B + C + A = 0 \ \Rightarrow\ B + C = -4$.
3. $p(-1) = -A + B - C + A = -6 \ \Rightarrow\ B - C = -6$.
4. Sumando: $2B = -10$, $B = -5$; $C = -4 + 5 = 1$. a) $A = 2,\ B = -5,\ C = 1$.

Resultado: $x \in (-\infty, -14] \cup (6, \infty)$.

Ejercicio 2.5.7 · Valor absoluto de un cociente

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 1.

Resuelva $\left|\frac{3x-2}{5x+1}\right| < 3$.

Resolución.

1. Restricción: $5x + 1 \neq 0$, es decir, $x \neq -\frac{1}{5}$.
2. Los dos lados son no negativos: $\frac{|3x-2|}{|5x+1|} < 3 \iff |3x-2| < 3|5x+1| \iff (3x-2)^2 < (15x+3)^2$.
3. Diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(3x-2)^2 - (15x+3)^2 &= (3x-2-15x-3)(3x-2+15x+3)\\ &= (-12x-5)(18x+1) < 0.\end{aligned}$$

4. Se multiplica por -1 y se invierte el sentido: $(12x+5)(18x+1) > 0$. Puntos críticos: $-\frac{5}{12}$ y $-\frac{1}{18}$.
5. Tabla de signos:

	$x < -\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{12} < x < -\frac{1}{18}$	$x > -\frac{1}{18}$
$12x+5$	−	+	+
$18x+1$	−	−	+
producto	+	−	+

6. El valor excluido $-\frac{1}{5}$ está entre $-\frac{5}{12}$ y $-\frac{1}{18}$, fuera de la solución.

Resultado: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{12}\right) \cup \left(-\frac{1}{18}, \infty\right)$.

Ejercicio 2.5.8 · Valor absoluto contra valor absoluto

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 2.

Obtenga el conjunto solución de $|3x-2| \leq |3+x|$.

Resolución.

1. Los dos lados son no negativos: $|3x-2| \leq |x+3| \iff (3x-2)^2 \leq (x+3)^2$.
2. Diferencia de cuadrados:

$$(3x-2)^2 - (x+3)^2 = (3x-2-x-3)(3x-2+x+3) = (2x-5)(4x+1) \leq 0.$$

3. Puntos críticos: $x = -\frac{1}{4}$ y $x = \frac{5}{2}$. El producto de dos factores con coeficiente positivo es negativo *entre* sus raíces, y vale cero en ellas.
4. Comprobación con $x = 0$: $|-2| = 2 \leq 3 = |3|$. Se cumple.

Resultado: $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right]$.

4. Prueba primero los más pequeños (±1, ±2) con división sintética. Cada vez que uno sea raíz, sigue con el cociente.
5. Cuando el cociente sea de grado 2, usa la fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

4.3.3 Regla de los signos de Descartes

1. Si $a_0 = 0$, factoriza x^k y trabaja con el otro factor.
2. Cuenta los cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$ (los ceros se saltan): da las posibles raíces positivas.
3. Escribe $p(-x)$: cambian de signo los coeficientes de las potencias **impares**. Cuenta sus cambios: posibles raíces negativas.
4. Arma la tabla: positivas y negativas bajan de dos en dos; las complejas completan el grado y siempre son un número par. Por ejemplo, para un polinomio de grado 5 con 2 cambios en $p(x)$ y 1 en $p(-x)$:

	1^a	2^a
Positivas	2	0
Negativas	1	1
Complejas	2	4
Total	5	5

Descartes no da las raíces; solo dice cuáles candidatos racionales vale la pena probar: si no hay positivas posibles, no se prueban los candidatos positivos.

4.3.4 Raíz compleja dada

1. Revisa los coeficientes.
2. **Si son reales:** el conjugado también es raíz. Divide dos veces seguidas (entre $x-\alpha$ y entre $x-\bar{\alpha}$), o divide una vez entre el factor cuadrático $x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$. El cociente tiene dos grados menos.
3. **Si alguno es complejo:** divide solo entre $x-\alpha$. El cociente puede quedar con coeficientes reales; a partir de ahí, posibles raíces racionales o fórmula general.
4. En la división sintética con complejos, multiplica con $i^2 = -1$ y suma partes reales con reales e imaginarias con imaginarias. El residuo debe salir exactamente 0; si no, hay un error de cuentas.

4.3.5 Coeficientes desconocidos

Cada dato se convierte en una ecuación lineal para los coeficientes:

- «c es raíz», «$x-c$ es factor», «es divisible entre $x-c$», «la gráfica corta el eje en c»: $p(c) = 0$.
- «la gráfica contiene al punto (a,b)»: $p(a) = b$. Si $a = 0$, da directo el término independiente.
- «α es raíz de multiplicidad 2»: dos divisiones sintéticas seguidas entre $x-\alpha$, cada una con residuo 0 (equivale a $p(\alpha) = 0$ y $p'(\alpha) = 0$).

Resuelve el sistema, sustituye los valores en $p(x)$ y **comprueba** cada dato antes de buscar las raíces.

Resultado: $x \in \left(-\frac{5}{12}, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{18}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 2.

Obtenga el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $\left|\frac{2x+6}{x-4}\right| < 2$.

Resultado: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

2.7 Errores frecuentes

1. **Base con todos los sumandos.** En la base el lado izquierdo es *solo* el primer sumando: con $n = 1$, $1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^{n-1}$ vale $6^0 = 1$.
2. **Sumando nuevo mal escrito.** Se obtiene sustituyendo $n = k+1$ en el término general: si es 6^{n-1}, el nuevo es 6^k, no 6^{k+1}.
3. **Usar la tesis para demostrarla.** El paso inductivo parte del lado izquierdo de $P(k+1)$ y llega a su lado derecho; la tesis no se usa como si ya fuera cierta.
4. **Base equivocada.** Si el enunciado dice $\forall\, n \geq 2$, la base es $n = 2$: con $n = 1$ el factor $1 - \frac{1}{n}$ vale 0.
5. **Sumar en un producto.** En una inducción con productos, el factor nuevo *multiplica*.
6. **Multiplicar por el denominador.** En $\frac{3x-2}{4x+1} < 3$, pasar $4x+1$ multiplicando supone que es positivo; se pierden soluciones.
7. **Olvidar invertir el sentido** al multiplicar o dividir entre un negativo.
8. **Incluir el cero del denominador.** Con $\geq$ o $\leq$ entran las raíces del numerador, nunca las del denominador.
9. **Valor absoluto con una sola rama.** $|A| > c$ son *dos* desigualdades unidas con «o»; $|A| < c$ es una desigualdad doble.
10. **Dejar el resultado sin intervalos.** El conjunto solución se escribe con intervalos y uniones.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Inducción: base $P(n_0)$ · hipótesis $P(k)$ · tesis $P(k+1)$ · conclusión.
- Sumando nuevo: término general con $n = k+1$. Lado izquierdo de $P(k+1)$ = lado izquierdo de $P(k)$ + sumando nuevo.
- Geométrica: $1+r+\cdots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$ $(r \neq 1)$ · aritmética: $\sum_{j=1}^{n}[a+(j-1)d] = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$.
- $a < b$ y $c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$.
- $|A| < c \iff -c < A < c$ · $|A| > c \iff A < -c$ o $A > c$ (con $c > 0$).
- $|A| < |B| \iff A^2 < B^2 \iff (A-B)(A+B) < 0$ · $\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$.
- Racional: $\frac{N}{D} < 0$ (o $\leq, >, \geq$), puntos críticos, tabla de signos; los ceros de D siempre quedan fuera.
- Un producto $(x-a)(x-b)$ con $a < b$ es negativo entre a y b, y positivo fuera.

Multiplicidad. α es raíz de multiplicidad k si $(x-\alpha)^k$ divide a p, pero $(x-\alpha)^{k+1}$ no. En la división sintética: α da residuo cero k veces seguidas. En la gráfica de un polinomio real, una raíz de multiplicidad impar *cruza* el eje; una de multiplicidad par lo *toca* sin cruzarlo.

Raíces conjugadas. Si los coeficientes son **reales** y $a+bi$ es raíz, también lo es $a-bi$. Las dos juntas dan un factor cuadrático real:

$$(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2).$$

Del mismo modo, si los coeficientes son **racionales** y $a+\sqrt{b}$ es raíz ($\sqrt{b}$ irracional), también lo es $a-\sqrt{b}$. Si algún coeficiente es complejo, el conjugado de una raíz **no** es necesariamente raíz.

Posibles raíces racionales. Si los coeficientes son enteros y $\frac{p}{q}$ (fracción reducida) es raíz, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n. La lista de candidatos es

$$\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}.$$

Regla de los signos de Descartes. Con p de coeficientes reales y $a_0 \neq 0$:

- el número de raíces reales **positivas** es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$, o menor que él en un número par;
- el número de raíces reales **negativas** es igual al número de cambios de signo de $p(-x)$, o menor en un número par.

Si $a_0 = 0$, primero se factoriza la potencia de x: $x=0$ es raíz y Descartes se aplica al otro factor.

Cota de las raíces. Un número $c>0$ es *cota superior* de las raíces reales si ninguna raíz real es mayor que c. Si al dividir sintéticamente p (con $a_n>0$) entre $x-c$ todos los números del renglón de resultados son mayores o iguales que cero, c es cota superior. Una cota inferior de p es el negativo de una cota superior de $p(-x)$.

Relaciones entre raíces y coeficientes. Si $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (coeficiente principal 1), la suma de las raíces es $-a_{n-1}$ y su producto es $(-1)^n a_0$. Sirven para comprobar el resultado.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«si se sabe que $\alpha = i$ (o $1-3i$) es raíz»	dividir entre $x-\alpha$ y seguir	4.3.1, 4.3.4
«expresar como producto de factores lineales»	todas las raíces y a_n	4.3.1
coeficientes con i y una raíz dada	dividir solo entre $x-\alpha$, sin conjugado	4.3.4

Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno usará los números complejos en sus diferentes representaciones y sus propiedades, para resolver ecuaciones con una incógnita que contengan números complejos. El programa de 2016 dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y en los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1). En el Plan 2010, 8 de 17 dan datos en un diagrama de Argand y 4 de 17 piden raíces n-ésimas; casi todos terminan en una potencia o raíz de la incógnita.
- **Tiempo:** de 2.5 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 y ten a la mano la tabla de ángulos notables de la sección 1B.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3.5.4, 3.5.5 y 3.5.6 con cronómetro (15 min cada uno).

3.1 Conceptos y expresiones

Las tres formas. Un número complejo se escribe de tres maneras equivalentes:

$$z = a + bi, \qquad z = r\operatorname{cis}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \qquad z = re^{i\theta}.$$

Son las formas binómica, polar y exponencial. $a = \operatorname{Re} z$ es la parte real, $b = \operatorname{Im} z$ la parte imaginaria, $r = |z| \geq 0$ el *módulo* y θ el *argumento*. En los exámenes el argumento de la forma polar se da en grados y el de la exponencial en radianes: $2\operatorname{cis}60^\circ = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Conversiones.

- Binómica a polar: $r = \sqrt{a^2+b^2}$; θ es el ángulo cuyo coseno es a/r y cuyo seno es b/r. Se ubica el cuadrante por los signos de a y b y se usa el ángulo de referencia, cuya tangente es $|b/a|$.
- Polar a binómica: $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$, con los valores exactos de la tabla de ángulos notables (sección 1B.1).
- Polar a exponencial: el mismo r y θ en radianes: $180^\circ = \pi$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

Valores que conviene saber de memoria.

$$1 = \operatorname{cis}0^\circ, \quad i = \operatorname{cis}90^\circ, \quad -1 = \operatorname{cis}180^\circ, \quad -i = \operatorname{cis}270^\circ,$$

$$1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ, \qquad 1+\sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ, \qquad \sqrt{3}+i = 2\operatorname{cis}30^\circ.$$

Potencias de i. Se repiten cada cuatro: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Para i^n se usa el residuo de dividir n entre 4: $i^{17} = i^1 = i$, $i^{20} = i^0 = 1$, $i^7 = i^3 = -i$.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 3.

Sean $z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$, $z_2 = 8e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_3 = 3\operatorname{cis}180^\circ$ y $z_4 = -3+4i$. Obtenga $z \in \mathbb{C}$ que satisface

$$z^{3/2} = \frac{(z_3 - \bar{z}_4)^3}{z_1 z_2}.$$

Resultado: $z^{3/2} = 4\operatorname{cis}90^\circ$: $z = 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}60^\circ,\ 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}180^\circ,\ 2\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}300^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

3.7 Errores frecuentes

- **Sumar en forma polar.** $2\operatorname{cis}30^\circ + 2\operatorname{cis}60^\circ$ no es $4\operatorname{cis}90^\circ$. Las sumas y restas siempre en binómica.
- **Equivocar el cuadrante.** La tangente solo da el ángulo de referencia: $-1-i$ está en el tercer cuadrante, su argumento es 225°, no 45°.
- **Leer mal el ángulo del diagrama.** Un ángulo marcado desde el eje imaginario o desde el semieje real negativo hay que convertirlo: 45° desde el semieje imaginario positivo hacia la izquierda es 135°.
- **Olvidar raíces.** $w^n = c$ tiene n soluciones. Con una sola, el problema queda incompleto.
- **Dividir el argumento sin sumar vueltas.** Las raíces son $\frac{\Phi+360^\circ k}{n}$, no solo $\frac{\Phi}{n}$.
- **Exponente racional al revés.** $w^{3/2} = c$ da $w = \sqrt[3]{c^2}$ (tres valores), no $w = \sqrt{c^3}$.
- **Conjugar mal.** $\overline{r\operatorname{cis}\theta} = r\operatorname{cis}(-\theta)$: cambia el signo del argumento, no el del módulo.
- **Potencias de i.** $i^{17} = i$, no $-i$: el residuo de 17 entre 4 es 1.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $z = a+bi = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$.
- i^n depende del residuo de n entre 4; $\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$; $-r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta+180^\circ)$.
- $\bar{z} = a-bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $z\bar{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$; $\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$.
- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis}n\theta$.
- $\sqrt[n]{r\operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+360^\circ k}{n}$, $k = 0,\dots,n-1$.
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^q}$.
- $a+bi = c+di$ si y solo si $a=c$ y $b=d$.
- $1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$; $1+\sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ$; $\sqrt{3}+i = 2\operatorname{cis}30^\circ$.

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe cada dato en una línea propia y redúcelo: potencias de i, vueltas completas, coeficientes negativos.
2. Sumas y restas en binómica; luego todo a polar con el argumento en grados.
3. Despeja la potencia de la incógnita y deja el lado conocido como $R\operatorname{cis}\Phi$.
4. Saca las n raíces y escríbelas en una lista $w_0,\dots,w_{n-1}$, en la forma que pide el enunciado.
5. Si quedan 5 minutos, eleva w_0 a la n para comprobar.

El enunciado dice…	Procedimiento (sección)
«Obtener los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen $w^3 \dots = \dots$», datos en varias formas	Una sola forma (3.3.1), simplificar (3.3.2), raíces (3.3.3)
«z_1 y z_2 están en el diagrama de Argand»	Leer módulo y argumento de la figura (3.3.1)
$w^{3/2}$, $z^{4/3}$, $x^{2/3}$ en la ecuación	Exponente racional (3.3.3)
«Determinar $x, y \in \mathbb{R}$», «los valores de a y b»	Igualdad de complejos (3.3.4)
$\bar{z}$, $\lvert z\rvert$ o «el módulo sea igual a…» con incógnita	Escribir $z = a+bi$ (3.3.5)
«Una de las raíces cúbicas de z es…»	Repartir cada $360^\circ/n$ (3.3.3)
«En forma polar», «en forma binómica»	Convertir el resultado al final (3.1)

3.3 Procedimientos

3.3.1 Pasar los datos a una sola forma

1. Reduce las potencias de i con el residuo entre 4 y los argumentos a $[0^\circ, 360^\circ)$.
2. Si hay sumas o restas, hazlas en forma binómica: convierte a binómica los números que van a sumarse.
3. Todo lo que se multiplica, divide o eleva a potencia, pásalo a forma polar con el argumento en grados.
4. Diagrama de Argand: lee el módulo (la longitud) o las coordenadas, y convierte el ángulo marcado al argumento desde el semieje real positivo. Por ejemplo, un segmento de longitud 8 que forma 45° con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, es $8\operatorname{cis}135^\circ$.

3.3.2 Simplificar el lado conocido

1. Calcula primero los paréntesis (sumas y restas en binómica) y pasa cada resultado a polar.
2. Multiplica módulos y suma argumentos; divide módulos y resta argumentos; con De Moivre, eleva el módulo y multiplica el argumento.
3. Reduce el argumento final a $[0^\circ, 360^\circ)$. El lado conocido debe quedar como $c = R\operatorname{cis}\Phi$.

3.3.3 Despejar la potencia y sacar las raíces

1. Despeja la potencia de la incógnita: $w^n = R\operatorname{cis}\Phi$.
2. Si el exponente es racional, $w^{p/q} = c$, cambia a $w^p = c^q$ (eleva c a la q con De Moivre).
3. Raíces: $w_k = \sqrt[n]{R}\operatorname{cis}\frac{\Phi+360^\circ k}{n}$, $k = 0,\dots,n-1$. Basta con calcular $\frac{\Phi}{n}$ y sumar $\frac{360^\circ}{n}$ cada vez.
4. Si te dan una raíz w_0 y piden las demás, solo suma $\frac{360^\circ}{n}$ al argumento; el número original es w_0^n.
5. Escribe el resultado en la forma que piden. Si te piden graficarlo, dibuja la circunferencia de radio $\sqrt[n]{R}$ y los n puntos.

1. z aparece sin potencias: se despeja como en los reales, $z = (3+3i)^2\left(\frac{1}{9}\operatorname{cis}300^\circ\right)\operatorname{cis}30^\circ$.
2. $(3+3i)^2 = 9+18i+9i^2 = 18i = 18\operatorname{cis}90^\circ$.
3. $z = 18\cdot\frac{1}{9}\operatorname{cis}(90^\circ+300^\circ+30^\circ) = 2\operatorname{cis}420^\circ = 2\operatorname{cis}60^\circ$.
4. **Resultado:** $z = 2\operatorname{cis}60^\circ = 1+\sqrt{3}\,i$.

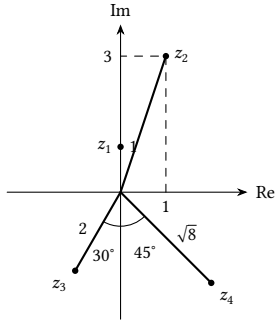
3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Los números z_1, z_2, z_3, z_4 están en el diagrama: z_1 sobre el eje imaginario a altura 1; z_2 en el punto $(1,3)$; z_3 con módulo 2 a 30° del semieje imaginario negativo, hacia la izquierda; z_4 con módulo $\sqrt{8}$ a 45° del semieje imaginario negativo, hacia la derecha. Obtenga los números $z\in\mathbb{C}$ que satisfacen $z^4 z_3^3 = \frac{2z_2-z_4}{z_1}$ y grafíquelos.



Resultado: $z^4 = 1$: $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$ (un cuadrado inscrito en la circunferencia unitaria).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 2.

Obtenga los números $w\in\mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^{3/2}z_1 = \frac{\sqrt{2}\,(z_2-\bar{z}_3)}{z_4\,i^{17}},$$

donde $z_1 = 1+i$, $z_2 = 3\operatorname{cis}180^\circ$, $z_3 = -3-6i$ y $z_4 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

Resultado: $w^{3/2} = 3$: $w = \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}0^\circ,\ \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}120^\circ,\ \sqrt[3]{9}\operatorname{cis}240^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

2. Lado derecho: $6+12i+2yi+4yi^2 = (6-4y)+(12+2y)i$.
3. Partes reales: $3x-8 = 6-4y$. Partes imaginarias: $2x+12 = 12+2y$, es decir, $x = y$.
4. Sustituyendo: $3x-8 = 6-4x \Rightarrow 7x = 14$.
5. **Resultado:** $x = 2$, $y = 2$.

Ejercicio 3.5.2 · Módulo con un parámetro

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de $x\in\mathbb{R}$ para que el módulo del número complejo $z = \frac{x+i}{1+i}$ sea igual a $\sqrt{5}$.

Resolución.

1. No hace falta dividir: $|z| = \frac{|x+i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}$.
2. Condición: $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2+1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9$.
3. **Resultado:** $x = 3$ o $x = -3$.
4. Comprobación con $x = 3$: $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$, y $|2-i| = \sqrt{5}$.

Ejercicio 3.5.3 · Ecuación con conjugado y potencia

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 2.

Determine el o los valores de $z\in\mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^2 = \frac{(z_3-\bar{z}_4)^3}{z_1+z_2},$$

donde $z_1 = \operatorname{cis}45^\circ$, $z_2 = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$, $z_3 = 5e^{\pi i}$ y $z_4 = -5+2i$.

Resolución.

1. Numerador: $z_3 = 5\operatorname{cis}180^\circ = -5$ y $\bar{z}_4 = -5-2i$, así que $z_3-\bar{z}_4 = 2i = 2\operatorname{cis}90^\circ$ y $(2i)^3 = 8\operatorname{cis}270^\circ$.
2. Denominador (suma en binómica): $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, y

$$z_1+z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i = 5\operatorname{cis}45^\circ,$$

   pues $r = \sqrt{2\cdot\frac{50}{4}} = 5$ y las dos partes son iguales y positivas.
3. $z^2 = \frac{8\operatorname{cis}270^\circ}{5\operatorname{cis}45^\circ} = \frac{8}{5}\operatorname{cis}225^\circ$.
4. Raíces cuadradas: $\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ y argumentos $\frac{225^\circ+360^\circ k}{2}$, $k = 0, 1$.
5. **Resultado:** $z_0 = \frac{2\sqrt{10}}{5}\operatorname{cis}112.5^\circ$, $z_1 = \frac{2\sqrt{10}}{5}\operatorname{cis}292.5^\circ$.

Ejercicio 3.5.4 · Datos en el diagrama de Argand: raíces cuartas

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 2.

Determine los valores de $w\in\mathbb{C}$ que satisfacen

$$\frac{w^4}{z_3} = (z_1-z_2)^3, \qquad z_3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i},$$

Base ($n=2$). Izquierdo: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Derecho: $\frac{1}{2}$. Se cumple.

Hipótesis ($n=k\geq 2$). $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}$.

Tesis ($n=k+1$). $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}$.

Paso inductivo.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}\cdot\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k+1}.$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo natural $n\geq 2$.

Ejercicio 2.5.5 · Suma con potencias de 2

Adaptado de: 1er final 2019-2, tipo C, problema 2.

Demuestre por inducción matemática que, para todo natural $n\geq 2$,

$$P(n):\quad 2+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\cdots+n\left(2^{n-2}\right)=(n-1)\left(2^{n-1}\right).$$

Resolución.

Proposición. Término general $n\,2^{n-2}$ (con $n=2$ da $2\cdot 2^0=2$); el sumando nuevo es $(k+1)2^{k-1}$. La base es $n=2$.

Base ($n=2$). Izquierdo: 2. Derecho: $(2-1)2^1=2$. Se cumple.

Hipótesis ($n=k\geq 2$). $2+3\cdot 2+\cdots+k\,2^{k-2}=(k-1)2^{k-1}$.

Tesis ($n=k+1$). $2+3\cdot 2+\cdots+(k+1)2^{k-1}=k\,2^k$.

Paso inductivo. Se saca como factor la potencia común 2^{k-1}:

$$(k-1)2^{k-1}+(k+1)2^{k-1}=2^{k-1}(k-1+k+1)=2^{k-1}\cdot 2k=k\,2^k.$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, $P(n)$ se cumple para todo natural $n\geq 2$.

Ejercicio 2.5.6 · Desigualdad racional con mayor o igual

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores de $x\in\mathbb{R}$ que satisfacen $\frac{3x+2}{2x-12}\geq 1$.

Resolución.

1. Todo a un lado: $\frac{3x+2}{2x-12}-1\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{3x+2-2x+12}{2x-12}\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{x+14}{2x-12}\geq 0$.
2. Puntos críticos: $x=-14$ (numerador) y $x=6$ (denominador).
3. Tabla de signos:

	$x<-14$	$-14<x<6$	$x>6$
$x+14$	$-$	$+$	$+$
$2x-12$	$-$	$-$	$+$
cociente	$+$	$-$	$+$

4. Cociente positivo o cero: entra $x=-14$ (anula el numerador y la desigualdad admite la igualdad); $x=6$ no, porque anula el denominador.

5. $p(x)=2x^3-5x^2+x+2$. El punto $(1,0)$ dice que $x=1$ es raíz:

	2	-5	1	2
1		2	-3	-2
	2	-3	-2	0

6. $2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)$.
7. b) **Raíces:** $1,\ 2,\ -\frac{1}{2}$.

Ejercicio 4.5.3 · Coeficientes complejos con una raíz dada

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 3.

Para el polinomio

$$P(x)=x^5+(-2+i)x^4+(-6-i)x^3+(8-7i)x^2+(5+i)x+(-6+6i),$$

determine sus raíces, si una de ellas es $1-i$, y represéntelo como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. Hay coeficientes complejos: $1+i$ **no** tiene por qué ser raíz. Se divide solo entre $x-(1-i)$:

	1	$-2+i$	$-6-i$	$8-7i$	$5+i$	$-6+6i$
$1-i$		$1-i$	$-1+i$	$-7+7i$	$1-i$	$6-6i$
	1	-1	-7	1	6	0

   Por ejemplo, en la segunda columna: $(1-i)(1)=1-i$ y $(-2+i)+(1-i)=-1$.
2. El cociente es real: $x^4-x^3-7x^2+x+6$. Candidatos racionales: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.
3. $x=1$ y luego $x=-1$:

	1	-1	-7	1	6
1		1	0	-7	-6
-1	1	0	-7	-6	0
		-1	1	6	
	1	-1	-6	0	

4. $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$.
5. **Raíces:** $1-i,\ 1,\ -1,\ 3,\ -2$.

$$P(x)=(x-1+i)(x-1)(x+1)(x-3)(x+2).$$

Ejercicio 4.5.4 · Polinomio bicuadrado y cota superior

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces del polinomio $p(x)=x^8+x^4-6$ y una cota superior de sus raíces reales.

Resolución.

1. Con $u=x^4$: $u^2+u-6=(u+3)(u-2)=0$, así que $u=2$ o $u=-3$.
2. $x^4=2$: raíces cuartas de $2=2\,\mathrm{cis}\,0^\circ$. Módulo $\sqrt[4]{2}$, ángulos $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$:

$$x=\sqrt[4]{2},\quad \sqrt[4]{2}\,i,\quad -\sqrt[4]{2},\quad -\sqrt[4]{2}\,i.$$

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{2}{2^{n-1}} = 2\left[\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}\right], \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Resultado: la base ($2 = 2$) y el paso inductivo se cumplen: $2\left[\frac{2^k-1}{2^{k-1}}\right] + \frac{2}{2^k} = 2\left[\frac{2^{k+1}-1}{2^k}\right]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d].$$

Resultado: la base ($a = a$) y el paso inductivo se cumplen: $\frac{k}{2}[2a + (k - 1)d] + a + kd = \frac{k+1}{2}[2a + kd]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 1er final 2020-2, tipo A, problema 2.

Demuestre por inducción matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n): \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots + \frac{1}{5^n} = -\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}.$$

Resultado: la base ($\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$) y el paso inductivo se cumplen: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^k} + \frac{1}{5^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5^{k+1}}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 1.

Determine el conjunto solución de la desigualdad $5 - \frac{x}{4} > -6$.

Resultado: $x \in (-\infty, 44)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 2.6.5

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 1.

Resuelva la desigualdad $\left|\frac{3x-2}{5x+1}\right| > 3$.

4.3.6 Polinomio a partir de su gráfica

1. Lee las raíces reales: los cortes con el eje x.
2. Asigna multiplicidad: si la curva *cruza* el eje, 1 (o impar); si lo *toca* y regresa, 2 (o par). El polinomio de menor grado usa la menor multiplicidad posible.
3. Escribe $p(x) = a(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots$.
4. Calcula a con un punto de la gráfica que no sea raíz: $p(x_0) = y_0$.
5. Comprueba el signo de a con el comportamiento de los extremos: si la curva sube a la derecha, $a > 0$.

4.3.7 Polinomios con potencias múltiplos de una

Si solo aparecen x^{2k}, x^k y constante ($x^8 + x^4 - 6$, $x^6 + 8x^3 + 12$):

1. Sustituye $u = x^k$: queda una cuadrática en u.
2. Resuelve para u (factorización o fórmula general).
3. Regresa: $x^k = u_1$ y $x^k = u_2$. Cada ecuación tiene k raíces, que son las raíces k-ésimas de u (Unidad 3).

4.3.8 Cota superior de las raíces

1. Con $a_n > 0$, divide sintéticamente entre $x - c$ para $c = 1, 2, 3, \ldots$
2. El primer c cuyo renglón de resultados (cociente y residuo) no tenga números negativos es una cota superior: ninguna raíz real es mayor que c.
3. Para la cota inferior, aplica lo mismo a $p(-x)$ y cambia el signo.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíz imaginaria dada en un polinomio real

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 3.

Determine todas las raíces del polinomio

$$f(x) = 2x^6 - x^5 - 2x^2 + x,$$

si se sabe que $\alpha = i$ es una de ellas.

Resolución.

1. No hay término independiente: $f(x) = x\,(2x^5 - x^4 - 2x + 1)$. Primera raíz: $x = 0$.
2. Los coeficientes son reales, así que $\bar{\alpha} = -i$ también es raíz. Se divide $g(x) = 2x^5 - x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ entre $x - i$ y luego entre $x + i$:

	2	-1	0	0	-2	1
i		$2i$	$-2-i$	$1-2i$	$2+i$	-1
	2	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	i	0

	2	$-1+2i$	$-2-i$	$1-2i$	i
$-i$		$-2i$	i	$2i$	$-i$
	2	-1	-2	1	0

3. Queda $2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Se agrupa: $x^2(2x - 1) - (2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - 1) = (2x - 1)(x - 1)(x + 1)$.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. **Inducción:** escribe los rótulos (Proposición, Base, Hipótesis, Tesis, Paso inductivo) antes de calcular; la tesis escrita orienta el álgebra.
2. En el paso inductivo, busca primero un **factor común**; si no lo hay, desarrolla los dos lados y compáralos.
3. Cierra con la conclusión completa: «por el principio de inducción matemática…».
4. **Desigualdad:** todo a un lado, una sola fracción, factores lineales, puntos críticos, tabla de signos.
5. Con valor absoluto de un cociente, o de un lado contra otro, eleva al cuadrado y factoriza como diferencia de cuadrados.
6. Comprueba con un valor de prueba de cada intervalo y escribe el resultado con intervalos.

Si no se termina el paso inductivo, la base, la hipótesis y la tesis bien escritas ya valen parte del problema.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«determinar A y B si 1 y -1 son raíces», «si contiene al punto», «si es divisible entre $x-2$»	ecuaciones para los coeficientes	4.3.5
«raíz de multiplicidad 2»	dos divisiones con residuo cero	4.3.5
«regla de los signos de Descartes», «posibilidades en que pueden presentarse las raíces»	tabla de posibilidades	4.3.3
«posibles raíces racionales»	lista $\pm p/q$	4.3.2
una gráfica y «el polinomio de menor grado»	raíces, multiplicidades y a_n	4.3.6
x^8+x^4-6, x^6+8x^3+12 (solo potencias múltiplos de una)	cambio de variable $u=x^k$	4.3.7
«una cota superior de las raíces»	división sintética con resultados ≥ 0	4.3.8
$f(x)=p(x)\,q(x)$	raíces de cada factor por separado	4.3.2

4.3 Procedimientos

4.3.1 División sintética

Para dividir $p(x)$ entre $x-c$:

1. Escribe en un renglón **todos** los coeficientes, de la potencia mayor a la menor, con cero en las potencias que faltan. Pon c a la izquierda.
2. Baja el primer coeficiente al renglón de resultados.
3. Multiplica ese resultado por c, escríbelo bajo el siguiente coeficiente y suma. Repite hasta el final.
4. El último número es el residuo, $p(c)$. Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos.
5. Si el residuo es 0, c es raíz: sigue trabajando con el cociente (polinomio *deflactado*).

Por ejemplo, $x^3-6x^2+11x-6$ entre $x-1$:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6).$$

4.3.2 Posibles raíces racionales y raíces reales

1. Si hay potencias de x en todos los términos, factoriza x^k: $x=0$ es raíz de multiplicidad k.
2. Si los coeficientes son fracciones, multiplica por el común denominador; las raíces no cambian.
3. Haz la lista $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.

Ángulos fuera de $[0^\circ, 360^\circ)$. El argumento no es único: $r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$ para todo entero k. Se reduce restando vueltas completas: $\operatorname{cis}1140^\circ = \operatorname{cis}(1140^\circ - 3\cdot 360^\circ) = \operatorname{cis}60^\circ$; $e^{2\pi i} = 1$; $\operatorname{cis}(-60^\circ) = \operatorname{cis}300^\circ$. Un coeficiente negativo se corrige sumando 180°: $-1\operatorname{cis}180^\circ = 1\operatorname{cis}0^\circ = 1$.

Conjugado y módulo. $\bar z = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$. Propiedades:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar z_1 \pm \bar z_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar z_1\,\bar z_2, \qquad z\bar z = |z|^2,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Operaciones. La suma y la resta se hacen en forma binómica. El producto, el cociente y las potencias, en forma polar o exponencial:

$$r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2), \qquad \frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2),$$

$$(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis}n\theta \quad \text{(De Moivre)}.$$

El cociente en forma binómica se hace multiplicando por el conjugado del denominador: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar z_2}{|z_2|^2}$.

Raíces n-ésimas. Todo $z = r\operatorname{cis}\theta \neq 0$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,\operatorname{cis}\frac{\theta + 360^\circ k}{n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Todas tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$ (raíz real positiva) y están repartidas cada $\frac{360^\circ}{n}$ sobre una circunferencia: forman un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Exponente racional. En los enunciados aparece $w^{p/q} = c$, que se entiende como $\left(\sqrt[q]{w}\right)^p = c$. Para despejar se eleva a la q y luego se sacan las raíces p-ésimas:

$$w^{p/q} = c \quad\Longrightarrow\quad w^p = c^q \quad\Longrightarrow\quad w = \sqrt[q]{c^q} \quad (p \text{ valores}).$$

Por ejemplo, $w^{2/3} = c$ da $w = \sqrt{c^3}$, dos valores; $w^{3/2} = c$ da $w = \sqrt[3]{c^2}$, tres valores.

Igualdad de complejos. En forma binómica, $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$: una ecuación compleja con incógnitas *reales* da dos ecuaciones reales. En forma polar, $r_1\operatorname{cis}\theta_1 = r_2\operatorname{cis}\theta_2$ si y solo si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + 360^\circ k$.

Diagrama de Argand. Es el plano con la parte real en el eje horizontal y la imaginaria en el vertical. Un número se puede dar por sus coordenadas (a, b) o por su módulo (la longitud del segmento) y un ángulo. Ese ángulo puede estar medido desde cualquier semieje: hay que convertirlo al argumento medido desde el semieje real positivo, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

3.2 Cómo reconocer el problema

Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno usará y analizará los conceptos del álgebra de los polinomios y sus propiedades para obtener raíces. El programa de 2016 dice lo mismo (sin mencionar las raíces conjugadas, que sus exámenes sí usan).

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema completo en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1; es el problema 3) y en los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1; es el problema 4). En el Plan 2010: raíz compleja dada, 7 de 17; coeficientes desconocidos a partir de raíces o puntos, 2; polinomio a partir de su gráfica, 2; regla de Descartes, 2; producto de dos polinomios, 2; polinomio bicuadrado con cota de raíces, 2.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4.1 y 4.3.1 (división sintética, 20 min).
  2. Sigue el ejemplo 4.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 4.5.3, 4.5.6 y 4.5.7 con cronómetro (15 min cada uno).

4.1 Conceptos y expresiones

Polinomio. Un polinomio de grado n en x es

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

con coeficientes reales o complejos. a_n es el *coeficiente principal* y a_0 el *término independiente*. Dos polinomios son iguales si tienen los mismos coeficientes en cada potencia.

Raíz. El número $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz (o cero) de p si $p(\alpha) = 0$. En la gráfica de un polinomio con coeficientes reales, las raíces reales son los puntos donde la curva toca o corta el eje x.

Algoritmo de la división. Para $p(x)$ y $d(x) \neq 0$ existen polinomios únicos $q(x)$ (cociente) y $r(x)$ (residuo) tales que

$$p(x) = d(x)\,q(x) + r(x), \qquad r = 0 \text{ o } \operatorname{grado} r < \operatorname{grado} d.$$

p es *divisible* entre d si $r(x) = 0$.

Teorema del residuo. El residuo de dividir $p(x)$ entre $x - c$ es $p(c)$.

Teorema del factor. $x - c$ es factor de $p(x)$ si y solo si $p(c) = 0$.

Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. En consecuencia, tiene exactamente n raíces, contando multiplicidades, y se escribe como producto de n factores lineales:

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

3.3.4 Igualdad de complejos con incógnitas reales

1. Pasa todo a forma binómica y desarrolla los productos (recuerda $i^2 = -1$).
2. Separa: parte real del lado izquierdo igual a parte real del derecho; lo mismo con la imaginaria.
3. Resuelve el sistema de dos ecuaciones reales.

3.3.5 Ecuaciones con conjugado o con módulo

1. Si z aparece junto con $\bar{z}$ o con $|z|$, no sirve sacar raíces: escribe $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $|z|^2 = a^2 + b^2$.
2. Iguala partes reales e imaginarias y resuelve para a y b.
3. Si solo hay un módulo, usa $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ sin hacer la división.
4. Si z aparece en forma lineal (sin potencias), despéjala como en una ecuación real.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Raíces cúbicas con datos en varias formas

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Obtenga los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{w^3\,(z_3 z_2)}{z_4} = z_1,$$

donde $z_1 = -1\,\mathrm{cis}\,180^\circ$, $z_2 = i^{20}$, $z_3 = 2\,\mathrm{cis}\,1140^\circ$ y $z_4 = 2e^{2\pi i}$.

Resolución.

1. Una sola forma (polar):
   - $z_1 = -1\,\mathrm{cis}\,180^\circ = -(-1) = 1 = \mathrm{cis}\,0^\circ$;
   - $z_2 = i^{20} = i^0 = 1$, porque $20 = 4 \cdot 5$;
   - $z_3 = 2\,\mathrm{cis}(1140^\circ - 1080^\circ) = 2\,\mathrm{cis}\,60^\circ$;
   - $z_4 = 2e^{2\pi i} = 2\,\mathrm{cis}\,360^\circ = 2$.
2. Despejar: $w^3 = \frac{z_1 z_4}{z_3 z_2} = \frac{(1)(2)}{2\,\mathrm{cis}\,60^\circ} = \mathrm{cis}(-60^\circ) = \mathrm{cis}\,300^\circ$.
3. Raíces cúbicas: $w_k = \sqrt[3]{1}\,\mathrm{cis}\,\frac{300^\circ + 360^\circ k}{3} = \mathrm{cis}(100^\circ + 120^\circ k)$.
4. **Resultado:** $w_0 = \mathrm{cis}\,100^\circ$, $w_1 = \mathrm{cis}\,220^\circ$, $w_2 = \mathrm{cis}\,340^\circ$.
5. Comprobación: $w_0^{\,3} = \mathrm{cis}\,300^\circ$, y $\mathrm{cis}\,300^\circ \cdot 2\,\mathrm{cis}\,60^\circ \cdot \frac{1}{2} = \mathrm{cis}\,360^\circ = 1 = z_1$.

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Igualdad de complejos

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 2.

Determine los valores $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$(3 + 2i)(x + 4i) = (6 + 2yi)(1 + 2i).$$

Resolución.

1. Lado izquierdo: $3x + 12i + 2xi + 8i^2 = (3x - 8) + (2x + 12)i$.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 2.

Determine los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^{4/3} = \frac{(i)^7\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) + \left(-\sqrt{3} + 2i\right)}{-\,\mathrm{cis}\,270^\circ}.$$

Resultado: $z^{4/3} = 1$: $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

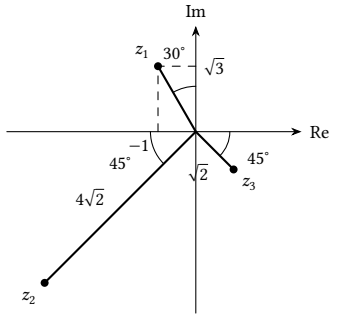
Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 2.

Determine los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^{2/3} = \frac{6z_1 z_3}{[z_2 - 2\bar{z}_3]\,(e^{\pi i})},$$

donde, en el diagrama, z_1 es el punto $(-1, \sqrt{3})$ (a 30° del semieje imaginario positivo); z_2 tiene módulo $4\sqrt{2}$ y forma 45° por debajo del semieje real negativo; z_3 tiene módulo $\sqrt{2}$ y forma 45° por debajo del semieje real positivo.



Resultado: $w^{2/3} = 2\,\mathrm{cis}\,30^\circ$: $w = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ = 2 + 2i$ y $w = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,225^\circ = -2 - 2i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 3.6.5

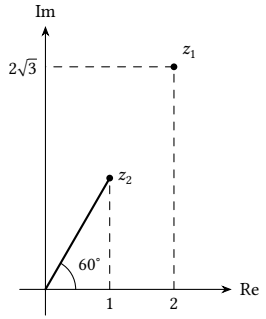
Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 3.

Sean $z_1 = 20e^{\pi i}$, $z_2 = 5\,\mathrm{cis}\,45^\circ$, $z_3 = 8 + 8\sqrt{3}\,i$ y $z_4 = 4\,\mathrm{cis}\,135^\circ$. Obtenga, en forma polar, los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $z^4 z_1 = z_2 z_3 z_4$.

Resultado: $z^4 = 16\,\mathrm{cis}\,60^\circ$: $z = 2\,\mathrm{cis}\,15^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}\,105^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}\,195^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}\,285^\circ$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

donde z_1 y z_2 están en el diagrama: z_1 es el punto de coordenadas $(2, 2\sqrt{3})$; z_2 está sobre la recta que forma 60° con el semieje real positivo y su parte real es 1.



Resolución.

1. Lectura: $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$. Para $z_2 = 1 + bi$, $\tan 60^\circ = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \sqrt{3}$: $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$.
2. $z_1 - z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis} 60^\circ$; $(z_1 - z_2)^3 = 8\operatorname{cis} 180^\circ$.
3. $z_3 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$. Despejar: $w^4 = 2\operatorname{cis} 60^\circ \cdot 8\operatorname{cis} 180^\circ = 16\operatorname{cis} 240^\circ$.
4. Raíces cuartas: $\sqrt[4]{16} = 2$, argumentos $\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} = 60^\circ + 90^\circ k$.
5. **Resultado:** $w_0 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$, $w_1 = 2\operatorname{cis} 150^\circ$, $w_2 = 2\operatorname{cis} 240^\circ$, $w_3 = 2\operatorname{cis} 330^\circ$: los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio 2.

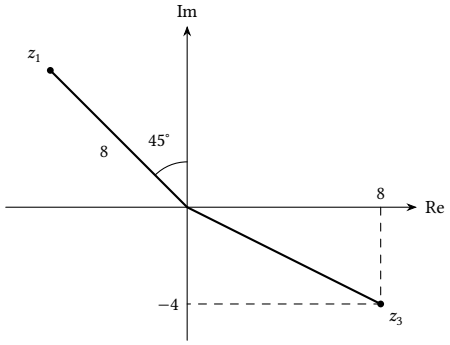
Ejercicio 3.5.5 · Exponente racional con datos en el diagrama

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 2.

Obtenga el o los valores de $x \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$x^{3/2} z_3 = 4\bar{z}_1 z_2 + 8x^{3/2}, \qquad z_2 = e^{\frac{3}{2}\pi i},$$

donde z_1 tiene módulo 8 y forma 45° con el semieje imaginario positivo, hacia la izquierda, y z_3 es el punto $(8, -4)$.



Resolución.

1. Lectura: el argumento de z_1 es $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$: $z_1 = 8\operatorname{cis} 135^\circ$ y $\bar{z}_1 = 8\operatorname{cis} 225^\circ$. $z_3 = 8 - 4i$ y $z_2 = \operatorname{cis} 270^\circ$.
2. Agrupar las x: $x^{3/2}(z_3 - 8) = 4\bar{z}_1 z_2$, con $z_3 - 8 = -4i = 4\operatorname{cis} 270^\circ$.
3. $x^{3/2} = \frac{4 \cdot 8\operatorname{cis} 225^\circ \cdot \operatorname{cis} 270^\circ}{4\operatorname{cis} 270^\circ} = 8\operatorname{cis} 225^\circ$.
4. Exponente racional: $x = \sqrt[3]{(8\operatorname{cis} 225^\circ)^2} = \sqrt[3]{64\operatorname{cis} 450^\circ} = \sqrt[3]{64\operatorname{cis} 90^\circ}$.
5. Raíces cúbicas: módulo 4, argumentos $30^\circ + 120^\circ k$.
6. **Resultado:** $x_0 = 4\operatorname{cis} 30^\circ$, $x_1 = 4\operatorname{cis} 150^\circ$, $x_2 = 4\operatorname{cis} 270^\circ = -4i$.

Ejercicio 3.5.6 · Las otras raíces cúbicas

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 3.

Si $z_1 = 2\operatorname{cis} 60^\circ$ es una de las raíces cúbicas de z, determine las otras raíces cúbicas de z y expréselas en forma binómica y exponencial.

Resolución.

1. Las tres raíces tienen el mismo módulo y están separadas $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.
2. Las otras dos: $2\operatorname{cis} 180^\circ$ y $2\operatorname{cis} 300^\circ$.
3. Binómica: $2\operatorname{cis} 180^\circ = -2$; $2\operatorname{cis} 300^\circ = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$.
4. Exponencial: $2e^{\pi i}$ y $2e^{\frac{5}{3}\pi i}$.
5. **Resultado:** $-2 = 2e^{\pi i}$ y $1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{5}{3}\pi i}$. Además, $z = z_1^3 = 8\operatorname{cis} 180^\circ = -8$.

Ejercicio 3.5.7 · Igualdad con forma polar

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo C, problema 3.

Determine los valores reales de a y de b para que

$$\frac{a + 4i}{2 + bi} = 2\operatorname{cis} 225^\circ.$$

Resolución.

1. $2\operatorname{cis} 225^\circ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.
2. Quitar el denominador:

$$a + 4i = (-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)(2 + bi) = (-2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,b) + (-2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,b)i.$$

3. Partes imaginarias: $4 = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,b \Rightarrow b = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2$.
4. Partes reales: $a = -2\sqrt{2} + \sqrt{2}(-2\sqrt{2} - 2) = -2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$.
5. **Resultado:** $a = -4 - 4\sqrt{2}$, $b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Ejercicio 3.5.8 · Ecuación lineal en z

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3.

Determine $z \in \mathbb{C}$ que resuelve la ecuación

$$2z = (3 + 3i)^2 \left(\tfrac{1}{9}\operatorname{cis} 300^\circ\right)\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right) + z.$$

Resolución.